L'apporto della psicologia alla comprensione dell'apprendimento della matematica: dall'approccio cognitivista agli STEAM

The contribution of psychology to understanding mathematical learning: from the cognitivist approach to STEAM

El aporte de la psicología en la comprensión del aprendizaje de la matemática: del enfoque cognitivista a los STEAM

Maria Beatrice Ligorio[1] **e Stefano Cacciamani**[2]

[1]*Dipartimento di Scienze della formazione, psicologia, comunicazione*
Università di Bari, Italia
[2]*Dipartimento di Scienze Umane e Sociali*
Università della Valle d'Aosta, Italia

Sunto. *In questo elaborato si propone una disamina di come sono stati concepiti i processi sottostanti l'apprendimento della matematica a partire dall'approccio cognitivista fino al contemporaneo approccio STEAM. Si farà riferimento al ruolo della metacognizione e al contributo del socio-costruttivismo. Non manca qualche cenno al ruolo dei docenti e alla didattica della matematica. Lo scopo è mostrare come le teorie e le pratiche relative all'apprendimento della matematica si siano evolute nel tempo e possano oggi contribuire a ripensare la didattica in ambito STEAM.*

Parole chiave: cognitivismo; metacognizione; socio-costruttivismo; STEAM

Abstract. *This paper proposes an examination of how the processes underlying the learning of mathematics have been conceived starting from the cognitivist approach up to the contemporary STEAM approach. Reference will be made to the role of metacognition and to the contribution of socio-constructivism. There is also some mention of the role of teachers and the teaching of mathematics. The overall aim is to show how theories and practices concerning learning mathematics evolved in time.*

Keywords: cognitivism; metacognition; socio-constructivism; STEAM

Resumen. *Este artículo propone un examen de cómo se concibieron los procesos subyacentes al aprendizaje de la matemática desde el enfoque cognitivista hasta el enfoque STEAM contemporáneo. Se hará referencia al papel de la metacognición y al aporte del socioconstructivismo. También se hace mención al papel de los profesores y la didáctica de la matemática. El objetivo es mostrar cómo las teorías y prácticas relacionadas con el aprendizaje de la matemática han evolucionado a lo largo del tiempo y pueden hoy contribuir a repensar la didáctica en el ámbito STEAM.*

Parablas clave: cognitivismo; metacognición; socioconstructivismo; STEAM

1. La matematica per l'approccio cognitivista

La psicologia ha cominciato ad interessarsi in modo molto consistente ai processi di apprendimento della matematica a partire dall'approccio cognitivista. Tale prospettiva teorica si è inizialmente focalizzata in modo particolare sull'attività di problem solving. Una prima analisi in tal senso può essere rintracciata già nel lavoro di Pólya (1945) che scomponeva il ragionamento matematico in quattro fasi: a) comprendere il problema, b) sviluppare un piano, c) applicare il piano, d) rivedere il lavoro ed estendere il piano a future situazioni. Queste fasi sembrano ricalcare il processo scientifico tanto da rendere sempre più stringente il paragone tra apprendimento della matematica e ragionamento scientifico, così che molti modelli nati in quegli anni sembrano ispirarsi proprio a questa analogia. Per esempio, Newell et al. (1959) mettono a punto il *General Problem Solver*–un programma computerizzato creato per studiare il problem solving ed altri comportamenti adattivi. Grazie a questo programma di ricerca i due autori formulano una teoria del problem solving che identifica il punto di avvio del processo nella rappresentazione mentale della situazione come "spazio del problema" (Newell & Simon, 1972). Con questa formulazione si intende il set di strutture simboliche utili per definire l'obiettivo da raggiungere, selezionare ed integrare le informazioni rilevanti ed individuare le regole logiche di trasformazione che consentono la transizione dallo stato iniziale del problema verso la soluzione. Greeno (1978) propone un ulteriore modello teorico dell'attività di problem solving che individua due componenti: la rappresentazione cognitiva delle informazioni del problema (basata sulla conoscenza schematica) e la comprensione delle operazioni necessarie per la soluzione (basata sulla conoscenza procedurale). Analizzando questi aspetti, l'autore distingue tre tipi di problemi (di organizzazione, di induzione e di trasformazione) e per ognuno di essi rintraccia strategie specifiche. È facilmente intuibile come il moltiplicarsi dei tipi di problemi e di strategie di soluzione annesse renda estremamente complesso restituire un quadro sintetico ed esaustivo di come gli studenti imparano a risolvere problemi.

Riguardo ai tipi di problemi, sulla scia del lavoro di Pólya (1945), un'altra distinzione identifica da una parte i cosiddetti 'problemi di routine' (o ben definiti), per i quali si dispone di una procedura da applicare per la loro soluzione; dall'altra i 'problemi non di routine' (o mal definiti), la cui procedura di soluzione non è disponibile e si richiede, quindi, di applicare in modo creativo la conoscenza disponibile in nuove situazioni non familiari (Singh et al., 2018). Già Pólya (1945), come abbiamo visto, e poi Schoenfeld (1985) hanno suggerito alcune strategie generali per risolvere un problema. Entrambi gli autori si sono anche concentrati sulla descrizione diquelle che vengono definite 'euristiche", ovvero metodi per risolvere problemi che non garantiscono una soluzione ottimale, ma che è necessario utilizzare quando un metodo per giungere ad una soluzione ottimale non esiste o non è disponibile per chi sta affrontando il problema (Hjeij & Vilks, 2023). Sono euristiche–per citare esempi ancora tratti da Polya (1945) –il trovare analogie tra il problema che si sta cercando di risolvere ed un problema già risolto, oppure scomporre il problema e ricombinare in altro modo i suoi elementi o ancora rappresentare graficamente il problema. Un approccio di tipo euristico è particolarmente importante per promuovere una visione della matematica come disciplina in cui lo studente è posto in una situazione autentica di problem solving, in cui gioca un ruolo attivo e creativo nell'ideare nuove procedure di soluzione, non limitandosi ad applicare quelle trasmesse dall'insegnante.

Il ruolo giocato dalla creatività nella risoluzione di problemi è sviluppato ulteriormente da un interessante approccio denominato Creative Problem Solving (CPS). Le radici del CPS si trovano nel lavoro di Alex Osborne (1953), focalizzato sul come promuovere la creatività nel trovare soluzioni nuove ed utili per sviluppare opportunità di miglioramento in ogni situazione. Un importante contributo di sistematizzazione di tale approccio è stato offerto da Treffinger (1995) che ha proposto un modello di CPS, recentemente rivisto (Treffinger et al., 2023), basato su diverse componenti di gestione e di processo. Una prima componente di gestione, chiamata *Pianificare il tuo approccio*, si articola in due fasi: Valutare il compito, per decidere se è opportuno usare il CPS, e Progettare l'utilizzo delle componenti di processo del modello. Seguono le tre componenti di processo articolate in ulteriori fasi: Comprendere la sfida (con le fasi di Costruire opportunità, Esplorare i dati e Inquadrare i problemi), Generare Idee (con una sola fase con la stessa denominazione della componente), Preparare l'azione (con le fasi di Sviluppare soluzioni e Costruire l'accettazione delle soluzioni stesse, che include anche la pianificazione della loro valutazione). L'attenzione al tema della creatività in ambito matematico è stata anche recentemente riproposta da Leikin e Sriraman (2022) che, analizzando gli articoli di uno special issue sul tema, ne descrivono l'articolazione in diversi ambiti di ricerca. In un primo ambito ci sono contributi che introducono nuove concezioni del rapporto tra matematica e creatività, identificate da diverse prospettive teoriche, come ad esempio la funzione dell'incertezza come catalizzatore della creatività in matematica. Un secondo ambito riguarda la relazione tra creatività in matematica ed altre caratteristiche personali. Studi in questo ambito evidenziano ad esempio che la conoscenza in matematica e la 'mentalità matematica' (la convinzione incrementale che la matematica può essere appresa ed usata per generare nuove idee) influenzano l'immaginazione in matematica. Un terzo ambito riguarda la relazione tra creatività e compiti matematici ed evidenzia come l'attività di costruzione di modelli matematici e la loro generalizzazione si sono dimostrati efficaci nella didattica e nella ricerca di strumenti per la promozione della creatività matematica. Un quarto ambito, infine, riguarda lo studio dei processi creativi collaborativi con studi che puntano a promuovere la flessibilità strategica collettiva–definita dal numero di strategie usate in un gruppo–o modelli di problem solving creativo collaborativo da implementare.

Accanto a questi filoni di ricerca, sempre più forte si è fatta via via strada la consapevolezza che gli aspetti cognitivi non esauriscono la comprensione dei processi di problem solving. È a partire da tale consapevolezza che si afferma, a partire dalla metà degli anni '70 quell'area di ricerca che va sotto il nome di "metacognizione" (Flavell, 1971). Tale area si articola in due ambiti: la conoscenza metacognitiva–quello che si sa di sé stessi e dei propri processi cognitivi–e i processi di controllo, che hanno il compito di supervisionare l'azione dei processi cognitivi nel momento in cui si affronta un problema (Brown, 1980). La ricerca sulla metacognizione ha offerto la possibilità di promuovere, nell'apprendimento della matematica, un ruolo attivo dello studente in quanto consapevole delle proprie caratteristiche cognitive ed in grado, a fronte di un compito matematico, di individuare le migliori strategie, monitorare il loro utilizzo e valutarne l'efficacia.

In tempi più recenti è stata, inoltre, studiata una componente particolarmente rilevante in ambito matematico, ovvero le concezioni (o credenze) degli studenti relative alla natura della matematica stessa (Simons, 1996). Alcuni autori, ad esempio Lucangeli e Cornoldi (1997), considerano la metacognizione come parte della conoscenza metacognitiva; altri, ad esempio De Corte (1999), non la considerano come un processo a sé ma piuttosto come un aspetto annesso alla motivazione. La definizione proposta da Simons (1996), invece, si riferisce alle idee generali e alle "teorie personali" che i soggetti hanno relativamente alla natura della disciplina di studio, alla propria autostima e motivazione e alle attribuzioni circa i propri successi e fallimenti. In ogni caso, le credenze in matematica sono state ampiamente studiate mostrando la rilevanza della dimensione metacognitiva nel determinare il successo in questo ambito. Schoenfeld (1992), riguardo alle credenze epistemologiche sulla matematica, inoltre, ha evidenziato la convinzione degli studenti che essere competenti in matematica significa avere un metodo veloce per la soluzione dei problemi in modo da individuare la risposta giusta nel più breve tempo possibile. Questa credenza è spesso in linea con le modalità di insegnamento: i docenti richiedono, nella maggior parte dei casi, l’applicazione delle procedure in tempi rapidi. Di converso, gli studenti sembrano convinti che la matematica significhi sostanzialmente calcolo, che un problema va risolto in massimo cinque minuti e che l’obiettivo è cercare *la* risposta corretta (Spangler, 1992). E se un compagno arriva ad una soluzione diversa dalla propria allora occorre considerare la sua bravura in matematica, se considerato bravo allora bisogna accettare il suo risultato e rivedere la procedura adottata. Assumere come vere tali credenze da parte degli studenti comporta il rischio di perdere di vista l’importanza dei processi di analisi della situazione problematica e di ragionamento logico implicate nel problem solving. Anche gli insegnanti possono influenzare lo sviluppo di tali credenze a seconda delle modalità con cui presentano i contenuti, il tipo di compiti che propongono, i metodi e i criteri di valutazione (Heyder et al., 2020; Mason, 2003).

Accanto alle credenze relative alla disciplina un altro tipo di credenze che può influire sul successo in matematica riguarda quelle che il soggetto ha nei confronti di sé stesso, ed in particolare riguardo alla propria auto-efficacia. L’autoefficacia in ambito scolastico può essere definita come la convinzione di un individuo di poter raggiungere con successo un determinato livello in un compito (Bandura, 1997). Pajares e Kranzler (1995) hanno dimostrato che l’autoefficacia in matematica ha un effetto di influenza diretta in generale sull’avere risultati positivi in matematica e sulla risoluzione di problemi matematici in particolare. Akin e Kurbanoglu (2011) hanno rilevato che l’autoefficacia in matematica è correlata negativamente con l’ansia e con atteggiamenti negativi verso la matematica, mentre correla positivamente con atteggiamenti positivi nei confronti della disciplina.

Da queste riflessioni alla constatazione della più generale importanza della relazione tra emozioni e apprendimento (anche) della matematica, il passo è breve. Infatti, mentre imparano, gli studenti possono provare diverse emozioni– dalla noia all’eccitazione, dalla preoccupazione alla gratificazione e dall’esasperazione alla soddisfazione (Richards, 2022). Seppure le teorizzazioni sulla relazione tra apprendimento ed emozione risalgano a molto tempo fa–ne parlavano già i filosofi greci come Aristotele–la valutazione sistematica delle emozioni nei contesti educativi è cominciata negli anni ’30, proprio in occasione dello sviluppo del primo questionario sull’ansia (Brown, 1938). Negli ultimi due decenni si è assistito a una crescita considerevole nell'indagine empirica sul ruolo delle emozioni nell'apprendimento passando da modelli basati sull'espressione facciale a quelli comportamentali, fino a quelli influenzati dalle neuroscienze (Camacho-Morles et al., 2021; Pekrun & Linnenbrink-Garcia, 2014; Tyng et al., 2017). Il vissuto emotivo è passato dall'avere una natura individuale ad una dimensione decisamente sociale, stabilendo così una relazione tra le emozioni provate e la didattica adottata–da quella tradizionale che implica uno studio individuale alla didattica socio-costruttivista per cui il lavoro di gruppo è imprescindibile (Crescenzo et al., 2023).

Ovviamente, ciascuna disciplina elicita emozioni specifiche. McLeod (1992), nel suo fondamentale articolo sull'insegnamento della matematica, aveva già evidenziato l'intima connessione tra cognizione, prestazione e emozione. Infatti, sosteneva che: "Se la ricerca sull'apprendimento e sull'istruzione vuole massimizzare il suo impatto su studenti e insegnanti, le questioni emotive devono occupare una posizione più centrale nella mente dei ricercatori" (McLeod, 1992, p. 575). Monito raccolto da molta della ricerca svolta negli anni successivi che potrebbe, a grandi linee, essere distinta come concentrata su due focus: la ricerca di connessioni causali tra costrutti emotivi e performance da un lato, e una maggiore intuizione e comprensione dell'atteggiamento negativo, così spesso riscontrato nell'apprendimento della matematica (Lewis, 2013).

Hannula (2002) individua nella categoria 'atteggiamento emotivo dello studente verso la matematica' quattro sottocategorie: 1) emozioni sperimentate durante le attività legate alla matematica; 2) emozioni associate automaticamente alla matematica; 3) valutazioni delle situazioni che ci si aspetta come conseguenza del fare matematica; e 4) valore degli obiettivi legati alla matematica nell'ambito degli obiettivi globali dello studente. Mentre uno studente è impegnato in un'attività matematica, continua inconsapevolmente a valutare la situazione rispetto ai propri obiettivi e questo genera una nuova emozione positiva particolarmente rilevante perché permette di procedere verso quegli obiettivi che procurano, anche loro, emozioni positive; mentre gli ostacoli che bloccano il progresso dell'apprendimento possono indurre rabbia, paura, tristezza o altre emozioni spiacevoli.

In generale, i risultati della ricerca mostrano un'associazione indiscutibile tra fiducia in sé stessi e risultati di apprendimento, sebbene si riconosca che la relazione è complessa e talvolta confusa (Mullis et al., 2004). Ovviamente, anche le emozioni negative, inclusi atteggiamenti e convinzioni avverse, impattano i risultati di apprendimento ma i loro effetti, in questo caso, sembrano avere conseguenze negative anche nella futura vita sociale e professionale (Evans, 2002).

Come si diventa bravi in matematica

Integrando gli studi sugli aspetti cognitivi e metacognitivi del processo di problem solving, alcuni autori hanno tracciato il profilo dell'esperto in matematica. Glaser (1985), ad esempio, ha sottolineato due aspetti: a) il rapido ricorso a schemi che organizzano la rappresentazione del problema e la scelta delle procedure per la soluzione; b) l'utilizzo di conoscenze metacognitive, ad esempio, la consapevolezza di cosa si sa e di cosa non si sa rispetto al problema, insieme ai processi di autoregolazione per il controllo della procedura di soluzione. Schoenfeld (1992), invece, individua quattro fattori rilevanti: a) la base di conoscenza che il soggetto possiede circa i problemi matematici; b) le strategie (o euristiche) che sa utilizzare; c) i processi di monitoraggio e di autoregolazione messe in atto a livello metacognitivo; d) le credenze circa la matematica, che possono favorire oppure ostacolare il processo di soluzione di problemi.

Collegando gli studi sulla metacognizione e con l'idea dell'esperto solutore di problemi, Lucangeli, Tressoldi e Cendron (1998) hanno messo a punto un modello per l'intervento didattico basato su cinque componenti:

1. *La comprensione del testo*. Nel testo di un problema matematico è possibile distinguere una struttura 'superficiale' che si riferisce ai termini linguistici attraverso cui viene espressa la relazione tra le variabili che sono presenti nella situazione problema, e una struttura 'profonda' relativa allo schema matematico che esprime la relazione tra le variabili indicate nel testo e le variabili da calcolare. Si osserva come modificando i termini linguistici della struttura 'superficiale' la comprensione della struttura profonda non è compromessa. Ad esempio, nel testo «Come regalo per i suoi 10 anni Paolo ha ricevuto 9 macchinine, ne regala 4 a suo fratello Andrea e ne smarrisce 2. Quanti gliene restano?» potremmo sostituire il termine 'macchinine' con qualsiasi altro termine indicante un oggetto senza modificare le relazioni tra i dati e la richiesta posta. È proprio questa la comprensione della struttura superficiale del problema; una condizione necessaria, anche se non sufficiente per poter procedere alla soluzione. Nel caso in cui, invece, non si comprendano i termini 'smarrisce' o 'restano', allora non saranno chiare neanche le implicazioni matematiche di tali termini rispetto alla struttura 'profonda' del problema.
2. *La rappresentazione*. Mette in evidenza le relazioni tra le informazioni fornite dal problema e l'incognita da individuare, costruendo quello che Mayer (2003) definisce un "modello della situazione". La costruzione della rappresentazione può essere favorita dall'uso di immagini, che costituiscono un formato più 'concreto' e manipolabile, particolarmente adatto per studenti più giovani; oppure di schemi che, invece, rappresentano un formato più

simbolico, adeguato per studenti più adulti che sanno già collegare lo stato finale richiesto (cosa devo trovare?) con lo stato iniziale (cosa so?) del problema. Tale capacità di rappresentazione risulta cruciale per la scelta della soluzione: una rappresentazione incompleta delle informazioni, infatti, può condurre ad una parziale o errata pianificazione della soluzione (Tani et al., 2007).

3. *La categorizzazione*. Permette di collocare il problema in una categoria più ampia di problemi accomunati dalla stessa ‘struttura profonda’ e che richiedono le medesime operazioni logiche per ottenere la soluzione (Passolunghi, 2003). Gli esperti non si lasciano fuorviare dalle etichette linguistiche presenti nel testo e sono in grado di individuare, a prescindere da esse, lo schema matematico di soluzione giusto per i problemi accomunati dalla stessa ‘struttura profonda’. I meno esperti, invece, tendono ad assimilare tra di loro problemi che presentano la stessa situazione in termini di espressioni linguistiche (ad esempio, spesa, guadagno, ricavo) anche se richiedono strategie di soluzione diverse.
4. *La pianificazione*. Questa è la componente metacognitiva che riguarda la messa a punto di una strategia che permetta di individuare la sequenza giusta delle operazioni e dei calcoli. Anche in questo caso, i solutori esperti tendono a scegliere la strategia più lineare ed efficace per raggiungere la soluzione, mentre i meno esperti ricorrono spesso a strategie stereotipate o sbagliano nel definire l’ordine delle operazioni da compiere (Lucangeli & Passolunghi, 1995).
5. *Il monitoraggio e la valutazione*. Sono due processi di controllo metacognitivo, entrambi essenziali per raggiungere la soluzione del problema. Il monitoraggio è un controllo on-task, che avviene durante lo svolgersi del compito e presiede alla verifica in itinere della corretta applicazione della strategia pianificata e al controllo della sua efficacia. La sua importanza è fondamentale in quanto permette di controllare le strategie mentre sono messe in atto, rilevando eventuali errori e correggerli in corso d’opera. La valutazione è, invece un processo di controllo off-task, vale a dire che si realizza a compito concluso, per effettuare un bilancio dei punti di forza e delle criticità della strategia impiegata ed eventualmente migliorarla per un suo futuro utilizzo. Gli studenti in difficoltà con l’apprendimento della matematica spesso sono manchevoli proprio dei processi di monitoraggio e valutazione (Schoenfeld, 1985).

2. La matematica nell'approccio socio-costruttivista

Il cambiamento di prospettiva introdotto nello studio dei processi di apprendimento della matematica dall'approccio socio-costruttivista modifica la definizione stessa della natura della matematica: non più una disciplina basata su un corpus di fatti e procedure matematiche da memorizzare per essere recuperate ed applicate quando viene richiesto, ma un'attività nella quale una comunità di praticanti si impegna nella costruzione di modelli basati su assiomi o teoremi (matematica pura) o di modelli astratti del mondo reale (matematica applicata) (Schonfeld, 1992).

La matematica è, secondo molti autori (D'Amore et al., 2006), storicizzazione di pratiche consolidate attraverso la pratica:

> Ciò significa, tra le altre cose, che ciò che conosciamo e il modo con cui raggiungiamo la conoscenza sono da inquadrare non solo mediante *ciò* che facciamo ora e *come* lo facciamo, ma anche da un'intelligenza storica riposta in pratiche sociali, istituzioni, linguaggio, artefatti, libri, monumenti e così via. La conoscenza e il conoscere sono entrambi sostenuti da questa intelligenza storica che abbiamo ereditato dalle generazioni passate. (D'Amore et al., 2006; p. 18)

Gli strumenti matematici diventano, così, astrazioni, rappresentazioni e manipolazioni simboliche della realtà e, pertanto, imparare la matematica significa imparare a pensare matematicamente. Così come l'apprendimento di una seconda lingua implica entrare a far parte di una comunità di pensiero e linguaggio, anche la matematica implica la capacità di conoscere e capire segni, simboli e termini del linguaggio matematico (Sfard et al., 1998). Questo è meglio realizzato in situazioni problematiche dove gli studenti hanno l'opportunità di leggere, scrivere e discutere idee in cui l'uso del linguaggio matematico diventa saliente (Sfard, 2006).

Di conseguenza, gli studi di matrice socio-costruttivista nell'ambito dell'apprendimento della matematica si concentrano su tre aspetti principali, che offrono anche indicazioni utili per l'insegnamento: a) la caratterizzazione situata della conoscenza, b) la necessità di problemi autentici e c) l'importanza della dimensione sociale nell'apprendimento della matematica.

L'attenzione alla caratterizzazione 'situata' della conoscenza ha portato ad una serie di studi dedicati alla cosiddetta 'matematica di strada'. Alcuni ricercatori (Nunes & Bryant, 1996; Nunes et al., 1993), ad esempio, hanno evidenziato che bambini di scuola primaria in Brasile sapevano affrontare problemi aritmetici abbastanza complicati in un contesto di compravendita, senza mai essere stati preparati con un training formale a scuola su questi temi. Questi bambini sviluppano efficienti ed accurate procedure matematiche per affrontare la vendita di frutta e dolci per strada; in altre parole, sanno definire il costo di un acquisto e sanno calcolare il resto senza conoscere le tabelline e senza tradurre in modo formale l'operazione della moltiplicazione. Infatti, quando agli stessi bambini venivano proposti i problemi aritmetici tipicamente scolastici, che richiedevano le stesse procedure di calcolo di quelli affrontati per strada, raggiungevano livelli di prestazione molto più bassi. A quanto pare la matematica 'orale' della strada consente di operare mentalmente con grandezze concrete, riferite ad oggetti reali che i bambini si trovano a maneggiare; mentre nella matematica scritta e formalizzata del contesto scolastico le cifre perdono la connessione con la realtà, diventano astratte ed inducono all'errore. A tal proposito, alcuni autori (Furuto, 2013) sottolineano la necessità di gettare un ponte tra la matematica accademica e la così detta "etnomatematica", ovvero le esperienze quotidiane dei bambini con le procedure matematiche nella loro cultura di appartenenza, affinché i concetti e le procedure matematiche insegnate a scuola possano essere comprese più efficacemente.

Il secondo aspetto emergente dalla ricerca di matrice socio-costruttivista, collegato al precedente, riguarda il proporre problemi matematici 'autentici' per gli studenti, superando la visione di una matematica connessa soprattutto all'acquisizione di strategie di soluzione di problemi e alla loro generalizzazione. Classicamente, l'insegnamento delle strategie di risoluzione di problemi matematici a scuola propone situazioni 'artificiali' che non hanno a che fare con le situazioni della vita reale dei bambini, producendo così una 'conoscenza inerte', che difficilmente verrà trasferita ad altri contesti. Il socio-costruttivismo propone un radicale ripensamento riguardo al contesto che caratterizza l'attività di problem solving a scuola: gli studenti vanno coinvolti in situazioni problematiche reali, significative e sfidanti, partendo dalle loro intuizioni per arrivare a diverse soluzioni alternative (Bottge, 1999). Una proposta in tale direzione è rappresentata dal programma di ricerca denominato "Anchored Istruction" proposto da un gruppo di ricercatori denominato Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1990) che ha sviluppato un vero e proprio curriculum intitolato "Le avventure di Jasper" in cui l'istruzione viene ancorata (vale a dire situata) in contesti problematici reali. Si tratta di 12 video che raccontano le avventure di un ragazzo che deve affrontare sfide contenti problemi la cui risoluzione richiede competenze matematiche (ad esempio prestare soccorso ad un'aquila ferita in una località remota, scegliendo il mezzo che consente di raggiungere il luogo più velocemente, tenendo conto della distanza e del carburante disponibile). Progettate per studenti a partire dal V anno di scuola primaria fino alla fine della scuola secondaria di primo grado, nella narrazione delle avventure compaiono i dati utili per la risoluzione del problema ma anche dati superflui; gli studenti imparano a riconoscere le informazioni utili ed inventare procedure per risolvere i problemi presentati nel video.

L'importanza della dimensione sociale nell'apprendimento della matematica è sempre più messa in evidenza dalla letteratura (Brown et al., 1989; Cobb, 1994; Greeno, 1989; Hannula, 2012; Resnick, 1989; Rogoff & Lave, 1984; Schoenfeld, 1989). Una traduzione operativa di tale prospettiva è rappresentata dall'idea che l'apprendimento della matematica possa essere organizzato a scuola in forma di "apprendistato cognitivo" (Collins et al, 1989), ovvero una modalità di lavoro in cui lo studente, proprio come avviene nell'apprendistato previsto per apprendere un lavoro manuale, apprenda secondo le seguenti fasi:

a) *Modeling*: inizialmente il maestro di bottega mostra all'allievo come si svolge l'attività; nel caso di un problema matematico, il docente/maestro modella le strategie per affrontare il compito;
b) *Coaching*: segue una fase in cui l'allievo affronta il compito sotto la supervisione dell'adulto, che fornisce suggerimenti e feedback in corso d'opera; l'obiettivo è far sì che l'allievo realizzi una prestazione efficace;
c) *Articolazione:* include le strategie che permettono allo studente di rendere espliciti i processi che ha utilizzato per affrontare il compito;
d) *Riflessione:* si confrontano i processi messi in atto dall'allievo con quelli dell'esperto o di uno studente più capace allo scopo di esaminarne le differenze;
e) *Esplorazione*: lo studente-novizio viene spinto a cercare strategie innovative per la soluzione del problema ed immaginare quali esiti potrebbero avere.

In questo modello diventa essenziale non solo che l'insegnante mostri le strategie e ne sostenga l'uso, ma che consenta agli studenti di risolvere i problemi in piccoli gruppi in modo da discutere sia le strategie da adottare che le convinzioni errate e fuorvianti circa la matematica che possono ostacolare la riuscita del compito e la formazione di risolutori costruttivi di problemi. Risulta, pertanto cruciale la dimensione della classe (D'Amore, 2005; Perry et al., 2006), sia nel suo determinare micro-contesti dentro la classe sia per le interconnessioni più ampie con quanto si colloca fuori dalla classe, ovvero a scuola, in famiglia, nel quartiere, in città e così via. Nel caso specifico dell'apprendimento della matematica, molto si è riflettuto in riferimento ai contesti introdotti nei compiti matematici e sull'uso degli esempi in classe, che dovrebbero rendere la matematica più facile e interessante ignorando spesso la complessità, la gamma e il grado di esperienza degli studenti e la loro intricata relazione con gli obiettivi e le credenze matematiche. Già Lave (1988) aveva dimostrato che il contesto specifico all'interno del quale è situato un compito matematico è capace di determinare non solo la prestazione generale ma anche la scelta del procedimento matematico. Certo, per i docenti non è sempre facile tener conto di queste dimensioni ma una riflessione sistematica su questi aspetti anche da parte loro può essere utile a creare un clima di classe positivo e a potenziare il “contratto didattico” tra docenti e studenti (D’Amore et al., 2020).

3. La matematica e gli STEAM

In tempi più recenti si assiste all’affermarsi dell’acronimo STEAM, che in effetti è una integrazione del precedente STEM che si riferiva esclusivamente alle discipline considerate scientifiche; quindi scienza, tecnologia, ingegneria e matematica, tutte discipline considerate alla base dell’innovazione e della prosperità nazionale (Atkinson & Mayo, 2010). Il nuovo acronimo, con l’inserimento della A, sancisce l’aggiunta delle “Arti” tra le materie STEM. La ragione di tale cambiamento è duplice. Da un lato, si riconosce che le discipline STEAM hanno tutte una rilevanza economica cruciale; ovvero, sono tutte aree disciplinari che, si presume, hanno un impatto importante sul prodotto interno lordo (PIL) dei paesi sviluppati. D’altro canto, l’aggiunta delle arti può indicare il recupero di obiettivi e scopi educativi che vanno oltre la crescita economica: ad esempio, puntando all’inclusione sociale, alla partecipazione della comunità e ai programmi di sostenibilità (Colucci-Gray et al., 2019). In ogni caso, si tratta di un esplicito tentativo di puntare all’integrazione di diverse discipline utilizzando una strategia di reciproco potenziamento piuttosto che rimarcare confini, costringendo gli studenti ad una visione di apprendimento ‘incapsulata’ nelle materie (Engeström, 2012).

Nonostante questo, un sempre crescente numero di studenti fallisce a causa di una inadeguata conoscenza della matematica necessaria per comprendere le altre materie STEAM, innescando così una spirale che determina un numero insufficiente di laureati STEAM (Holton et al., 2009). La matematica pare sia ampiamente antipatica agli studenti di molti paesi (Thomson et al., 2016) e spesso è considerata difficile o noiosa (Moyer et al., 2018). Inoltre, avendo a disposizione una pletora di tecnologie moderne e date per scontate non è facile riconoscere l’importanza del saper fare di conto (Hansen, 2002). Di conseguenza, molti studenti, compresi quelli più capaci, scelgono di studiare materie matematicamente meno impegnative o di evitare del tutto discipline in cui ci sia della matematica (Wienk, 2017). L’attuale insegnamento della matematica sembra non ispirare gli studenti a proseguire gli studi in questa direzione e, quindi, impedisce a molti potenziali laureati di perseguire gli studi nelle aree STEAM rinunciando a carriere che sarebbero probabilmente più gratificanti e di maggiore valore per la società.

L’innovazione introdotta con gli STEAM riguarda anche una revisione radicale delle teorie cognitive tradizionali, in particolare in riferimento al modo con cui si considera il corpo. Non più semplice osservatore ‘passivo’ del cervello e necessario solo per l'esecuzione delle azioni motorie. L'approccio denominato "embodied cognition" suggerisce, infatti, che l'acquisizione di informazioni ha a suo fondamento sia la percezione che l'azione e che la cognizione è profondamente dipendente dalle caratteristiche del corpo fisico di un agente (Barsalou, 2008; Clark, 2008).

L'educazione matematica si occupa non solo di creare mezzi e metodi di insegnamento efficaci, ma anche di comprendere perché alcuni metodi sono efficaci e altri no, e di affrontare questioni più ampie sulla natura e lo sviluppo della conoscenza matematica. Porsi domande, concettualizzare problemi e costruire e sperimentare diverse strategie per indagarli, sono abilità fortemente influenzate dalla nostra concettualizzazione implicita o esplicita sulla natura del pensiero umano e sulla matematica stessa. Quando la matematica è concepita come un regno esterno di verità oggettive, da 'scoprire' attraverso l'applicazione del pensiero razionale, allora l'indagine dell'apprendimento della matematica si concentra su mappature, modelli e rappresentazioni interne accurate di entità e relazioni matematiche. Se, invece, la matematica è concepita come un prodotto dell'attività umana adattiva nel mondo, condivisa e resa significativa attraverso il linguaggio, ma basata in ultima analisi su esperienze biologiche e corporee uniche della nostra specie, allora l'educazione matematica deve adottare un approccio diverso. Dovrebbero emergere nuove pratiche di didattica della matematica, insegnamento in classe, progettazione del curriculum, ma anche di impostazione della ricerca scientifica che presentino la matematica come un'autentica attività basata sulla mente con tutte le sue peculiarità e bellezza incarnate (Núñez et al., 1999). Solo così si potrà rispondere alla richiesta di formare le cosiddette abilità del XXI secolo, le cui concettualizzazioni includono tipicamente creatività, competenza collaborativa, problem solving e pensiero critico. L'attenzione su questo tipo di abilità può essere collegata al rapido ritmo del cambiamento guidato dai progressi nelle tecnologie digitali (ad esempio, stampa 3D, intelligenza artificiale) con conseguenze di vasta portata per ogni aspetto della vita delle persone, nonché su alcune questioni internazionali (ad esempio, cambiamento climatico, sicurezza idrica e alimentare), le cui soluzioni richiederebbero una cooperazione internazionale. Ironia della sorte, questi sviluppi potrebbero essere guidati proprio dalle discipline STEAM dove creatività, collaborazione e pensiero critico sono fondamentali, a patto di valorizzare la matematica.

5. Conclusioni

Con questo contributo ci siamo posti l'obiettivo di evidenziare il nesso tra l'evoluzione delle teorie da una parte e delle pratiche didattiche dall'altra, relative alla didattica della matematica. Alla luce dell'analisi condotta emerge che la ricerca di matrice cognitivista ha identificato i processi cognitivi utili per una didattica della matematica che promuove la competenza di problem solving e il ruolo attivo dello studente. Successivamente l'approccio socio-costruttivista ha sottolineato l'importanza di progettare ambienti di apprendimento significativi in cui le competenze rilevanti per lo scenario sociale e culturale attuali possono essere promosse in modo situato, affrontando problemi autentici e rilevanti per il tempo presente e lavorando in contesti collaborativi. È, quindi, imperativo e tempestivo che la connessione tra le materie STEAM e le competenze del XXI secolo sia esplicitata e che sia riconosciuto il ruolo fondamentale della matematica a supporto dello sviluppo delle competenze auspicate.

Nello specifico della didattica della matematica, ci sono già diversi tentativi di progettare attività che si concentrano sul processo creativo, piuttosto che enfatizzare il risultato (Lavicza et al., 2018). L'arte come contesto per la risoluzione di problemi matematici può essere un fruttuoso punto di partenza, poiché include il pensiero creativo e la ricerca della propria strada (Burnard et al., 2016). Le attività creative possono aiutare gli studenti a riconoscere che fare matematica 'vera' *è* pensiero creativo, nel senso che la propria creatività può essere espressa anche attraverso la matematica. Le attività di problem solving possono sottolineare l'aspetto processuale della matematica ma se il problema è aperto e la sua risoluzione richiede collaborazione, allora la diversificazione dei punti degli studenti costituisce il vero punto di forza per raggiungere un livello di gruppo che sia maggiore della somma delle competenze dei singoli individui. Lo sviluppo di capacità collaborative di problem solving e il supporto degli studenti nella scoperta di connessioni inaspettate tra diversi aspetti di un fenomeno sono strumenti a sostegno del pensiero critico e creativo; inoltre, rappresentano obiettivi ambiziosi dell'educazione odierna, dove svolgono un ruolo di potenziamento anche gli strumenti tecnologici e i modelli di apprendimento in rete, che qui però non abbiamo lo spazio per commentare compiutamente (Cacciamani et al., 2012; Impedovo et al., 2012).

Riferimenti bibliografici

Akin, A., & Kurbanoglu, I.N. (2011). The relationships between math anxiety, math attitudes, and self-efficacy: A structural equation model. *Studia Psychologica*, *53*(3), 263.

Atkinson, R. D., & Mayo, M. (2010). *Refuelling the US innovation economy: Fresh approaches to science, technology, engineering and mathematics (STEM) education*. The Information Technology and Innovation Foundation.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* Freeman.

Barsalou, L.W. (2008). Grounded cognition. *Annual Review, 59*(1), 617–645. http://dx.doi.org/10.1146/annurev.psych.59.103006.093639

Bottge, B.A. (1999). *Effects of Contextualized Math Instruction on Problem Solving of Average and Below- Average Achieving Students*. The Journal of Special Education*, 33*(2), 81–92. https://doi.org/10.1177/002246699903300202

Brown, A.L. (1980). *Metacognitive Development and Reading*. In R.J. Spiro, B. Bruce, & W.F. Brewer (Eds.), *Theoretical Issues in Reading Comprehension* (pp. 453–79). Lawrence Erlbaum.

Brown, C.H. (1938). Emotional reactions before examinations: Results of a questionnaire. *Journal of Psychology, 5*, 11–26. https://psycnet.apa.org/doi/10.1080/00223980.1938.9917549

Brown, J.S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). *Situated cognition and the culture of learning.* Educational Researcher*, 18*(1), 32–42. https://doi.org/10.3102/0013189X018001032

Burnard, P., Mackinlay, E., & Powell, K. (2016) (Eds). *The Routledge International Handbook of Intercultural Arts Research*. Routledge.

Cacciamani, S., Cesareni, D., Martini, F., Ferrini, T., & Fujita, N. (2012). Influence of participation, facilitator styles, and metacognitive reflection on knowledge building in online university courses. *Computers & Education*, *58*(3), 874–884. http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2011.10.019

Camacho-Morles, J., Slemp, G.R., Pekrun, R., Loderer, K., Hou, H., & Oades, L.G. (2021). Activity achievement emotions and academic performance: A meta-analysis. *Educational Psychology Review, 33*(3), 1051–1095. https://psycnet.apa.org/doi/10.1007/s10648-020-09585-3

Clark, A. (2008). *Supersizing the mind: Embodiment, action, and cognitive extension*. Oxford University Press.

Cobb, P. (Ed.). (1994). *Learning Mathematics*. Kluwer Academic.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1990). Anchored instruction and its relationship to situated cognition. *Educational Researcher*, *19*(6), 2–10. https://doi.org/10.3102/0013189X019006002

Collins, A., Brown, J.S., & Newman, S. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing, and mathematics. In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 453–494). Erlbaum. http://dx.doi.org/10.4324/9781315044408-14

Colucci-Gray, L., Burnard, P., Gray, D., & Cooke, C. (2019). A critical review of STEAM (science, technology, engineering, arts, and mathematics). *Oxford research encyclopedia of education*. Oxford University Press. http://dx.doi.org/10.1093/acrefore/9780190264093.013.398

Crescenzo, P., Ritella, G., Sansone, N., Bulut, S., Annese, S., & Ligorio, M.B. (2023). Students’ Emotions in Socio-constructivist Approaches: Comparing Experiences at Different Italian School Levels. *Human Arenas*, 1–23. https://doi.org/10.1007/s42087-023-00371-5

D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società. *Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325–336.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). Gli effetti del contratto didattico in aula. *Uno strumento concreto per gli insegnanti di Matematica. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau:* Pitagora.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G.T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29*(1), 12–39.

De Corte, E. (1999). On the road to transfer: An introduction. *International Journal of Educational Research*, *31*(7), 555–59.

Engeström, Y. (2012). Non scolae sed vitae discimus: Toward overcoming the encapsulation of school learning. In H. Daniels (Ed.), *An introduction to Vygotsky* (pp. 164–183). Routledge.

Evans, J. (2002). *Adults' mathematical thinking and emotions: A study of numerate practice* (Vol. 16). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203434185

Flavell, J.H. (1971). First discussant's comments: What is memory development the development of? *Human Development, 14*(4)*,* 272–278. https://doi.org/10.1159/000271221

Furuto, L.H. (2013). Bridging policy and practice with ethnomathematics. *Journal of Mathematics & Culture*, *7*(1), 31–57.

Glaser, R. (1985). *The nature of Expertise. Occasional Paper No. 107*. National Center of Research in Vocational Education. Available at https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED261190.pdf

Greeno, J.G. (1978). A study of problem solving. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 1, pp. 13–75). Erlbaum.

Greeno, J.G. (1989). For the study of mathematics epistemology. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 23–31). National Council of Teachers of Mathematics.

Hannula, M.S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics*, *49*(1), 25–46. https://doi.org/10.1023/A:1016048823497

Hannula, M.S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: Embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137–161. https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Hansen, V.L. (2002). Popularizing mathematics: From eight to infinity. In L.I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Vol. 3, pp. 885–888). Higher Education Press.

Heyder, A., Weidinger, A.F., Cimpian, A., & Steinmayr, R. (2020). Teachers' belief that math requires innate ability predicts lower intrinsic motivation among low-achieving students. *Learning and Instruction*, *65*(2), 101220. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101220

Hjeij, M., & Vilks, A. (2023). A brief history of heuristics: how did research on heuristics evolve? *Humanities and Social Sciences Communications*, *10*(1), 1–15.

Holton, D., Muller, E., Oikkonen, J., Sanchez Valenzuela, O.A., & Zizhao, R. (2009). Some reasons for change in undergraduate mathematics enrolments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(1), 3–15. http://dx.doi.org/10.1080/00207390802597621

Impedovo, M.A., Ligorio, M.B., & Law, E.H. (2012). A method for the Analysis of Inter-action in an Online Learning Community. *Qwerty-Open and Interdisciplinary Journal of Technology, Culture and Education*, *7*(2), 39–59.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice.* Cambridge University Press.

Lavicza, Z., Fenyvesi, K., Lieban, D., Park, H., Hohenwarter, M., Mantecon, J.D., & Prodromou, T. (2018). Mathematics learning through Arts, Technology and Robotics: multi-and transdiscpilinary STEAM approaches. In *EARCOME 8: 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 28–29). National Taiwan Normal University.

Leikin, R., & Sriraman, B. (2022). Empirical research on creativity in mathematics (education): From the wastelands of psychology to the current state of the art. *ZDM–Mathematics Education, 54*(1), 1–17. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01340-y

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in mathematics education*, *15*(1), 70–86. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2012.756636

Lucangeli, D. & Cornoldi, C. (1997). *Mathematics and metacognition: what is the nature of the relationship? Mathematical Cognition, 3*(2)*,* 121–139. https://doi.org/10.1080/135467997387443

Lucangeli, D. & Passolunghi, M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico.* Utet.

Lucangeli, D., Tressoldi, P. & Cendron, M. (1998). *SPM. Test delle abilità di soluzione dei problemi matematici.* Erickson.

Mason, L. (2003). High School Students' Beliefs About Maths, Mathematical Problem Solving, and Their Achievement in Maths: A cross-sectional study. *Educational Psychology, 23*(1), 73–85. http://dx.doi.org/10.1080/01443410303216

Mayer, R. (2003). *Learning and instruction.* Merrill Prentice Hall.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Macmillan Publishing Company.

Moyer, J. C., Robison, V., & Cai, J. (2018). Attitudes of high-school students taught using traditional and reform mathematics curricula in middle school: A retrospective analysis. *Educational Studies in Mathematics, 98*(2), 115–134. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9809-4

Mullis, I.V., Martin, M.O., Gonzalez, E.J., & Chrostowski, S.J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report*. TIMMS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

Newell, A. & Simon, H. (1972). *Human problem solving.* Prentice-Hall.

Newell, A., Shaw, J.C., & Simon, H.A. (1959). Report on a general problem solving program. In R. Maheu, H.H. Aiken, A. Danjon, P. Auger, H. Vinel (Eds.), *Proceedings of the 1st International Conference on Information Processing,* *UNESCO, Paris 15-20 June* (pp. 256–264). Disponibile da https://exhibits.stanford.edu/feigenbaum/catalog/sy501xd1313

Nunes, T., Schliemann, A.L. & Caraher, D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge University Press.

Nunesz, T. & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Blackwell Publishers.

Núñez, R.E., Edwards, L.D., & Filipe Matos, J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1–3), 45–65. http://dx.doi.org/10.1023/A:1003759711966

Osborne, A.F. (1953). *Applied imagination.* Scribner.

Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). Self-efficacy beliefs and general mental ability in mathematical problem-solving. *Contemporary educational psychology*, *20*(4), 426–443.

Passolunghi, C. (2003). Memoria, metacognizione e soluzione di problemi. In O. Albanese (Ed.), *Metacognizione e apprendimento* (pp. 151–172). FrancoAngeli.

Pekrun, R., & Linnenbrink-Garcia, L. (Eds.). (2014). *Handbook of emotions in education*. Routledge.

Perry, B., Dockett, S., Harley, E., & Hentschke, N. (2006). Linking powerful mathematical ideas and developmental learning outcomes in early childhood mathematics. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan *(Eds.), Proceedings of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) Conference 2006* (pp. 408–415). MERGA Inc.

Pólya, G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Resnick, L. (1989).Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving,* (pp. 32–60). National Council of teachers of Mathematics.

Richards, J.C. (2022). Exploring emotions in language teaching. *RELC Journal, 53*(1), 225–239. https://doi.org/10.1177/0033688220927531

Rogoff, B. & Lave, J. (Eds.) (1984). *Everyday cognition: Its development in social context.* Harvard University Press.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving., In L.B. Resnick & B.L. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research: Yearbook of the American Society for Curriculum Development* (pp. 83–103). Association for Supervision and Curriculum Development.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370). MacMillan.

Sfard, A. (2006). Participationist discourse on mathematics learning. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 153–170). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087903510_015

Sfard, A., Nesher, P., Streefland, L., Cobb, P., & Mason, J. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *For the learning of mathematics*, *18*(1), 41–51.Simons, P.R.J. (1996). Metacognition. In E. De Corte &

F.E. Weinert (Eds.), *International encyclopedia of developmental and instructional psychology* (pp. 436–441).Pergamon.

Simons, P. (1996). Metacognition. In E. De Corte & F.E. Weinert (Eds.), *International Encyclopedia of Developmental and Instructional Psychology* (pp. 436–441) Pergamon.

Singh, P., Teoh, S. H., Cheong, T.H., Rasid, N.S.M., Kor, L.K., & Nasir, N.A.M. (2018). The use of problem-solving heuristics approach in enhancing STEM students' development of mathematical thinking. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *13*(3), 289–303. https://doi.org/10.12973/iejme/3921

Spangler, D. A. (1992). Assessing student's beliefs about mathematics. *The Mathematic Educator, 3*(1)*,* pp. 19–23.

Tani, F., Ciuffi, N. & Vitta, A. (2007). *Le difficoltà nel calcolo dei bambini.* Seid.

Thomson, S., Wernert, N., O'Grady, E., & Rodrigues, S. (2016). *TIMSS 2015: A first look at Australia's results*. Australian Council for Educational Research.

Treffinger, D.J. (1995). Creative problem solving: Overview and educational implications. *Educational psychology review*, *7*, 301–312.

Treffinger, D.J., Isaksen, S.G., & Stead-Dorval, K.B. (2023). *Creative problem solving: An introduction*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003419327

Tyng, C. M., Amin, H. U., Saad, M. N., & Malik, A. S. (2017). The influences of emotion on learning and memory. *Frontiers in Psychology*, *8*, 1454. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.01454

Wienk, M. (2017). *Discipline profile of the mathematical sciences*. Australian Mathematical Sciences Institute.